Урок математики в 7 классе

Тема: « Линейное уравнение с параметром »

Учитель математики МБОУ «СОШ №14»

Г.Братск

Жукова Светлана Владимировна

20013г.

Содержание:

1. Введение.

2. Знакомство с параметрами. Линейные уравнения с параметрами.

3. Схема исследования уравнения вида Ах=В.

4. Типы уравнений. Формулировки заданий.

5. Уравнения, приводимые к линейным и алгоритмы их решения.

6. Примеры решений уравнений с параметром из ГИА. Тест.

7. Заключение.

8. Используемая литература.

1. Введение.

 В настоящее время различные задачи с параметрами – это одни из самых сложных заданий на экзаменах. А ведь в экзаменационных заданиях они есть как за 9 класс, так и за 11, но многие ученики даже не берутся решать эти задания, так как заведомо считают, что не смогут их решить, даже не попробовав. А на деле, чтобы справиться с ними, нужно всего лишь проявить логику, включить смекалку и ничего сложного не окажется.

Обращаясь к этой теме, я хотела бы облегчить и себе, и своим слушателям, тяжесть решения задач с параметрами.

Цель урока - научить решать линейные уравнения с параметрами и познакомиться с методами решения подобных заданий.

Я поставила перед собой следующие задачи:

1. Научить решать линейные уравнения с параметрами различных видов.
2. Познакомить с разными методами решения подобных уравнений.
3. Показать какие задания с параметрами встречаются на ГИА.
4. Составить тест.
5. Знакомство с параметром. Линейные уравнения с параметрами.

Для начала, стоило бы пояснить, что собой представляют уравнения с параметрами, которым посвящена моя работа. Итак, если уравнение (или неравенство), кроме неизвестных, содержит числа, обозначенные буквами, то оно называется параметрическим, а эти буквы – параметрами.

Если параметру, содержащемуся в уравнении (неравенстве), придать некоторое значение, то возможен один из двух следующих случаев:

* получится уравнение , содержащее лишь данные числа и неизвестные (т.е. без параметров);
* получится условие, лишенное смысла.

В первом случае значение параметра считается допустимым, во втором – недопустимым. К **задачам с параметром** можно отнести, например, поиск решения линейных уравнений в общем виде, исследование уравнения на количество имеющихся корней в зависимости от значения параметра.

Не приводя подробных определений, в качестве примеров рассмотрим следующие линейные уравнения:

у = kx, где x, y – переменные, k – параметр;

у = kx + b, где x, y – переменные, k и b – параметр;

Уравнение вида Ах-В=0, где А и В выражения, зависящие от параметров, а х - переменная, называют линейным. Иногда уравнения, кроме букв, обозначающих неизвестное(X, Y,Z), содержат другие буквы, называемые параметрами(a, b, c). Тогда мы имеем дело не с одним, а с бесконечным множеством уравнений.
При одних значениях параметров уравнение не имеет корней, при других – имеет только один корень, при третьих – два корня.
Решить такое уравнение – это значит:

1) определить множество допустимых значений неизвестного и параметров;

2) для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующие множества решений уравнений.

При решении таких уравнений надо:
1) найти множество всех доступных значений параметров;
2) перенести все члены, содержащие неизвестное, в левую часть уравнения, а все члены, не содержащие неизвестного в правую;
3) привести подобные слагаемые;
4) решать уравнение ax = b.

Возможно три случая.

1. а 0, b – любое действительное число. Уравнение имеет единственное решение х = 2. а = 0, b = 0. Уравнение принимает вид: 0х = 0, решениями являются все х R.
3. а = 0, b 0. Уравнение 0х = b решений не имеет.
Сделаю одно замечание. Существенным этапом решения уравнений с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы «ветвится» в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа – это сбор ранее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.
Ответ:  х =  при а  0, b – любое действительное число;
 х – любое число при а = 0, b = 0;
 решений нет при а = 0, b ≠ 0.

3. Схема исследования линейного уравнения.

Таким образом, любое линейное уравнение с параметрами элементарными преобразованиями может быть приведено к виду Ах=В, где А и В – некоторые выражения, хотя бы одно из которых содержит параметр и  исследуется по схеме: ( приложение1.)

**4. Задачи с параметром можно условно разделить на два типа:**

**а)**в условии сказано: решить уравнение (неравенство, систему) – это значит, для всех значений параметра найти все решения. Если хотя бы один случай остался неисследованным, признать такое решение удовлетворительным нельзя.

**б)**требуется указать возможные значения параметра, при которых уравнение (неравенство, система) обладает определенными свойствами. Например, имеет одно решение, не имеет решений, имеет решения, принадлежащие промежутку и т. д.

В таких заданиях необходимо четко указать, при каком значении параметра требуемое условие выполняется.

Параметр, являясь неизвестным фиксированным числом, имеет как бы особую двойственность. В первую очередь, необходимо учитывать, что предполагаемая известность говорит о том, что параметр необходимо воспринимать как число. Во вторую очередь, свобода обращения с параметром ограничивается его неизвестностью. Так, например, операции деления на выражение, в котором присутствует параметр или извлечения корня четной степени из подобного выражения требуют предварительных исследований. Поэтому необходима аккуратность в обращении с параметром.

Я нашла различные формулировки заданий:

* При каких значениях параметра а уравнение а2(х-2)=х+а-3 имеет бесконечное множество решений?
* При каком значении параметра а корень уравнения х+3=2х-а будет отрицательным числом?
* Для каждого значения параметра а, определить число корней уравнения |x-1| =а.
* Для каждого значения параметра а, определить число корней уравнения |5x-3|=а.
* При каких значениях параметра с корень уравнения х+с=3х-5, является неотрицательным числом?
* При каких значениях параметра а, корень уравнения 4а+12х=4ах-3а+6 больше 3?
* Сравнить числа: а) а и 3а;  б) -а и 3а.
Решение:
а) естественно рассмотреть три случая:
если  а < 0, то а > 3а;  если  а = 0, то а = 3а; если  а > 0, то а < 3а;
* При каком значении параметра а,  х=2,5 является корнем уравнения х+2=а+7?
 Решение:
Т.к.  х= 2,5 – корень уравнения  х+2=а+7, то при подстановке  х= 2,5 в уравнение
получим верное равенство  2,5+2=а+7, откуда находим  а =-2,5.
Ответ: при а=-2,5.
* Имеет ли уравнение  3х+5 = 3х+а  решение при а=1. Подберите значение а, при котором уравнение будет иметь корни.
* Найдите множество корней уравнения  ах = 4х+5
а)  при а=4; б)  при а≠4.
* Найти все натуральные значения а, при которых корень уравнения (а-1)х=12 является: a) натуральным числом; б) неправильной дробью.
* Решение:
а≠1, то так как иначе уравнение не имеет решений;
а) если а≠1, то 
Перебором находим:
при а=13,  х=1;при а=7,    х=2;при а=5,    х=3;при а=4,    х=4;при а=3,    х=6;при а=2,    х=12.
Ответ: а є {13, 7, 5, 4, 3, 2}.
б) если а≠1, то 
Перебором находим, что а є {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.
* Решить уравнение |х|=|а|.
* Решить уравнение ах+8=а.
Решение. Запишем уравнение в стандартном виде  ах=а-8.
Основа правильного решения задач с параметрами состоит в грамотном разбиении области изменения параметра, к этому надо приучать путем подробного описания хода решения.
Итак, коэффициент при х равен а.

Возникают два возможных случая:

-коэффициент при х равен нулю и уравнение примет вид 0х=-8, полученное уравнение не имеет корней;

-коэффициент при х не равен нулю, и мы имеем право разделить обе части уравнения на этот коэффициент:    а≠0, ах=а-8,  
Ответ:   при а=0, нет  корней; при а≠0, 

**5. Уравнения, приводимые к линейным и алгоритмы их решения.**

**Алгоритм решения такого типа уравнений:**

1. Определить «контрольные» значения параметра.

2. Решить исходное уравнение относительно х при тех значениях параметра, которые были определены в первом пункте.

3. Решить исходное уравнение относительно х при значениях параметра, отличающихся от выбранных в первом пункте.

4. Записать ответ можно в следующем виде:

Ответ:

1) при … (значения параметра), уравнение имеет корни …;

2) при … (значения параметра), в уравнении корней нет.

Пример № 1.При каких значениях а уравнение (а2-1)х=а+1
а) не имеет решений; б) имеет бесконечное множество решений; в) имеет единственный корень.
Решение:
а) данное уравнение не имеет решений в том случае, если коэффициент при х равен нулю, а выражение, стоящее в правой части уравнения не обращается в нуль, то есть 
Т.о., при а=1 уравнение не имеет решений.
б) данное уравнение имеет бесконечное множество решений в том случае, если коэффициент при х равен нулю и выражение, стоящее в правой части уравнения, обращается в нуль, то есть 
Т.о., при а=-1 уравнение имеет бесконечное множество решений.
в) уравнение имеет единственное решение, при а2-1≠0, то есть (а-1)(а+1)≠0, т.е. а≠±1.
Ответ: Уравнение не имеет решений, при а=1.

Уравнение имеет бесконечное множество решений, при а=-1.

Уравнение имеет единственный корень, при а≠±1.

Пример №2.  Решить уравнение     (а-1)х+2=а+1.
Решение. Запишем уравнение в стандартном виде
(а-1)х=а-1.

Если а-1=0, т.е. а=1, то уравнение примет вид 0х=0, т.е. х – любое число.

Если а-1≠0, т.е. а≠1, то х=1.

Ответ:
при а=1, х – любое число; при а≠1, х=1.

Пример №3. Для каждого значения а, решить уравнение ; найти при каких а, корни больше нуля.

Это уравнение не является линейным уравнением (т.е. представляет собой дробь), но при х-1 и х0 сводится к таковому:  или а-1-х=0.

Мы уже выявили допустимые значения икс (х-1 и х0), выявим теперь допустимые значения параметра а: а-1-х=0  а=х+1

Из этого видно, что при х0 а1, а при х-1 а0.

Таким образом, при а1 и а0 х=а-1 и это корень больше нуля при а>1.

Ответ: при а<0 х=а-1; при  решений нет, а при a>1 корни положительны.

6. Примеры решений уравнений с параметром из ГИА и ЕГЭ части С. Тест.

Узнав всю теоретическую основу и методы решений различных уравнений, содержащих параметр, я решила применить свои знания на практике. Я выбрала несколько вариантов заданий ГИА, представляющих собой именно те виды уравнений, которые были представлены в моей работе, а именно: уравнение первой степени с одним неизвестным. Ниже будут предложены решения этих уравнений.

Определить значения k, при которых корни уравнения  положительны.

Сразу можно выделить, что , , из этого следует, что при  уравнение не имеет смысла.



В уравнение х(3k-8)=6-k подставим недопустимые значения х, чтобы узнать, при каких k уравнение не имеет смысла:



Итак, мы выяснили, что .

Выразим х: . Х будет больше нуля, если .



Учитывая, что , , . Ответ: , 

ИССЛЕДОВАНИЕ: Я самостоятельно решила уравнение:  и исследовала его корни на четность и нечетность. 

 

 

а) Если ; , то  - единственное решение

б) Если , то  (ложь) – нет решений

в) Знаем, что корни должны быть четными, отсюда составим равенство:

 N

 

 N

г) Знаем, что корни могут быть и нечетными, поэтому составим равенство:

 N

 

 

 N

Ответ: Если  то  - единственное решение,

 Если , то решений нет,

 Если N, то корни уравнения - четные,

 Если N, то корни уравнения - нечетные.

И решив следующее уравнение, выяснила при каких значениях параметра а, среди корней уравнения 2ах – 4х –а2 + 4а - 4 = 0 есть корни больше 1.

Решение: 2ах – 4х – а2 + 4а - 4 = 0

 2(а-2) х = а2 –4а +4

 2(а-2) х = (а-2)2

 При а = 2, 0 х = 0, решением будет любое число, в том числе и большее 1.

 При а ≠ 2 х = , по условию х> 1, то  > 1, а>4 .

Ответ: при а ∈{2} ∪ (4 ; + ∞ ) .

Составила тест.

**Вариант 1**

1. Решите уравнение mx + 2 = - 1 относительно х .

А. x = - , при m ≠ 0

Б. 1) при m = 0 корней нет;

 2) при m ≠ 0 x = 

В. 1) при m = 0 корней нет

 2) при m ≠ 0 x = - .

 2. Решите уравнение k(х – 4 ) + 2(х + 1) = 1 относительно х.

А.1) при k = -2 корней нет;

 2) при k ≠ -2 х = 

Б.1) при k = - 2 корней нет

 2) при k =  x = 0

В.1) при k = 0 корней нет.

 2) при k ≠ 0 х =  3) при k ≠ -2 , k ≠  х = 

3. Решите уравнение 2а (а-2)х = а2-5а+6 относительно х.

А. 1) при а =2 х ∈ R

2) при а =0 корней нет

3) при а ≠ 0 и а ≠ -2, х =

Б. 1) при а =2 х ∈ R

 2) при а =0 корней нет

 3) при а≠0 и а ≠ 2, х = 

В. 1) при а=2 х ∈ R

2) при а =0 корней нет

3) при а =3 х =3

4) при а ≠2, а ≠ 0, а≠ 3 х = 

4. При каких значениях b уравнение 1+2х –bх=4+х имеет отрицательное решение?

А.При b < 1 Б. При b > 1 В. При b < -1

**Вариант 2**

1. Решите уравнение (m – 2) х = 3 относительно х .

А. x = - , при m ≠ 0

Б. 1) при m = 2 корней нет;

 2) при m ≠ 2 x =

В. 1) при m = 2 корней нет

 2) при m ≠ 2 x = .

 2. Решите уравнение а(3х-2) =6х – 4 относительно х .

А.1) при а = 2 x – любое число;

 2) при а ≠ 2 х = 

Б.1) при а = -2 корней нет

 2) при а =  x = 0

В.1) при а = 0 корней нет.

 2) при а ≠ 0 х = 

 3) при а ≠ -2 , а ≠  х = 

3. Решите уравнение 3ах – 6х –а2 + 4а - 4 = 0 относительно х .

А. 1) при а =2 х ∈ R

2) при а =0 корней нет

3) при а ≠ 0 и а ≠ -2, х =

Б. 1) при а =2 х ∈ R

 2) при а≠2 , х = 

В. 1) при а=2 х ∈ R

2) при а =0 корней нет

3) при а =3 х =3

4) при а ≠2, а ≠ 0, а≠ 3 х = 

4. При каких значениях b среди корней уравнения х – bх + b2 – 1=0 есть корни больше 1?

А.При b > -1 Б. При b > 0 В. При b < -1

Ответы к тесту:

№1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Код верного ответа | В | А | Б | Б |

№2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Код верного ответа | Б | А | Б | А |

7. Заключение.

Итак, проделав эту работу, я действительно поняла, как решаются уравнения с параметрами, приобрела навык решения и, надеюсь, теперь не столкнусь с трудностями при решении подобных заданий на экзамене.

Что дают задачи с параметрами:

а) отработку навыков решения уравнений;
б) повышают интеллектуальный уровень ученика и его логическое мышление;
в) формируют навыки исследовательской деятельности;
г) повышают интерес к математике.

Конечно, не все далось сразу и легко – чтобы научиться решать уравнения с параметрами, нужно выйти за рамки представлений об уравнении, при этом не забывая о свойствах данного типа уравнения. Удаётся это не сразу. К тому же, в школьной программе задачам с параметрами не уделяется должного внимания, поэтому, увидев такое на экзамене, конечно, можно растеряться.

Размещено на

Используемая литература.

1. Газета «Математика». Учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября»:  Е.Пронина, « Линейные уравнения с параметрами» №12, 2000 г.;  C.Неделяева, «Особенности решения задач с параметрами» №34, 1999 г.
2. Мочалов В.В., Сильвестров В.В. Уравнения и неравенства с параметрами. Чебоксары: Изд-во Чувашского университета,  2004.
3. П.И.Горнштейн, В.Б.Полонский, М.С.Якир «Задачи с параметрами», 2002г
4. В.В.Локоть «Задачи с параметрами», 2003г.
5. А.П. Карп «Даю уроки математики…», 1992 г.

Приложение1.



.