Муниципальное бюджетное учреждение

средняя школа №82

г.о. Тольятти Самарской области

Тематическая разработка

 **«Внимание, параметр»**

(различны методы решения задач с параметром)

Класс: 10 -11

Автор: Родионова Галина Михайловна,

учитель математики

МБУ СШ № 82 г.о. Тольятти

 Самарской области

2014

**Различные способы решения задач с параметрами**

Задачи с параметром вызывают у многих если не панический страх, то по крайней мере, чувство неудобства. Между тем задачи с параметром можно одолеть различными способами. Покажем на примере несколько из них.

**Задача 1**. *Найти все значения параметра а, при которых не имеет корни уравнение*

$\sqrt{2x^{2}+ax+2x+10}$ = x – 1. (1)

Решение: Данное уравнение равносильно ситстеме

$\left\{\begin{array}{c}x\geq 1\\2x^{2}+ax+2x+10 = (x-1)^{2}\end{array}\right.$ $⟺\left\{\begin{array}{c}x\geq 1\\x^{2}+\left(a+2\right)x+2a+9 = 0\end{array}\right.$

Уравнение (1) не имеет корней тогда и только тогда, когда не имеет решения эта система. Это возможно в двух случаях :

а) квадратное уравнение не имеет корней;

б) корни этого уравнения не удовлетворяют условию x ≥ 1.

Найдем все значения параметра, при котором выполняется хотя бы один случай:

а) уравнение $x^{2}+\left(a+2\right)x+2a+9 = 0 $не имеет корней, если D < 0, т.е. $a^{2}-4a-32<0 $и, значит, a $\in (-4; 8)$,

б) корни уравнения $x^{2}+\left(a+2\right)x+2a+9 = 0$ меньше 1.

Рассмотрим три случая решения этой задачи:

*1 способ*. Корни уравнения меньше 1, если больший корень уравнения меньше 1(достаточное условие):

$\frac{-a-2+\sqrt{a^{2}-4a-32}}{2}$ *<* 1 $⟺\sqrt{a^{2}-4a-32}$ < a + 4 $⟺$ $\left\{\begin{array}{c}a^{2}-4a-32\\a + 4>0\\a^{2}-4a-32< (a+4)^{2}\end{array}\right.$

$⟺$ a $ϵ$ [8; + ∞ ).

Объединяя ответа а) и б) получим ответ: a $ϵ$ [- 4; + ∞ ).

Ответ: a ϵ (- 4; + ∞ ).

2 способ решения (б). Рассмотрим квадратичную функцию

 f (x) = $x^{2}+\left(a+2\right)x+2a+9$.

 Её корни (нули функции) меньше 1 тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия: D $\geq $0, f(1) > 0, x0 < 1, где точка минимума данной функции (вершина параболы). Отсюда

$\left\{\begin{array}{c}a^{2}-4a-32\geq 0 \\1+a+2+2a+9>0\\-\frac{a+2}{2}<1\end{array}\right.⟺$ a $ϵ$ [8; + ∞ ).

3способ. Пусть t = x – 1. Тогда x < 1 $⟺$ t +1 < 1 $⟺$ t < 0. В таком случае уравнение примет вид

t2 + (a +4) t + 3a +12 = 0.

Корни уравнения отрицательны, если их сумма отрицательна, а произведение положительно. По теореме Виета заключаем:

$\left\{\begin{array}{c}D>0\\t\_{1}+t\_{2}\\t\_{1}∙t\_{2}\end{array}\right.<0$ $⟺$ $\left\{\begin{array}{c}a^{2}-4a-32>0\\-\left(a+4\right)<0\\3a+12>0\end{array}\right.⟺$ a $ϵ$ [8; + ∞ ).

Объединяя ответа а) и б) получим ответ: a $ϵ$ [- 4; + ∞ ).

Ответ: a ϵ (- 4; + ∞ ).

4 способ . Возведем в квадрат обе части уравнения (1)

$$\left\{\begin{array}{c}x\geq 1\\2x^{2}+ax+2а+10 = (x-1)^{2}\end{array}\right.⟺\left\{\begin{array}{c}x\geq 1\\x^{2}+2x+9 =-a\left(x+2\right).\end{array}\right.$$

Последняя система позволяет графически найти все значения *а*, при которых система *не имеет решения*. Мы ищем все такие значения параметра а. при которых прямые пучка = - a (x + 2) на имеют общих точек с параболой

у = х2 +2х + 9 на промежутке [1;+ ∞). Для прямой у = $-a\left(x+2\right)$ угловой коэффициент равен - а0 . Прямая и парабола имеют общие точки на промежутке [1; +∞) при а $\leq $ a0 . При a > a0 общих точек нет (сделай рисунок). Значение a0  найдем из того условия, что прямая у = $-a\left(x+2\right)$ проходит через точку М(1;12), а0 = - 4.

Ответ: а > - 4.

Возможна и несколько иная графическая интерпретация. Из уравнения (1) получим систему:

$$\left\{\begin{array}{c}х\geq 1\\a= -\frac{x^{2}+2x+9}{x+2}\end{array}\right.$$

Далее находим, при каких значениях параметра а прямая у = а не имеет общих точек с графиком функции у$= -\frac{x^{2}+2x+9}{x+2}$ .

График можно построить, применяя производную.

**Задача 2**. *Найти все значения параметра* ***а*** *, при которых уравнение*

*a |x - 1| = x + 2* *имеет ровно один корень . Укажите этот корень.*

*Решение:*

Если х $\geq 1$, то x = $\frac{a+2}{a -1}$ . Преобразуем эту дробь: x = $\frac{a-1 +3}{a -1}$ = 1 + $\frac{3}{a -1}$. Отсюда видно, что x > 1 при a >1.

Если x < 1, то исходное уравнение примет вид a(1 – x) = x + 2 . Отсюда

 x = $\frac{a- 2}{a+1}$. Эта дробь меньше 1 при a > - 1.

Изобразим найденные значения ***а*** на координатной прямой.

 а

 - 1 1

По рисунку видны два случая. В первом случае при а > 1 уравнение имеет два корня: x = $\frac{a+2}{a -1}$ и x2 = $\frac{a-2}{a+1}.$

Промежуток а $ϵ $(1; + ∞) показан двойной «штриховкой». Второй случай показан одной «штриховкой». При a $ϵ$ (-1 ; 1] имеет один корень. Подчеркнём, что *а = 1* относится ко второму случаю, а в первом исключается.

Ответ: при a $ϵ$ (-1; 1] один корень x = $\frac{a-2}{a+1}$.

Задача 3 . *Найти все значения параметра* ***а*** *, при которых уравнение*

*x4* + (3a + 1) x2 + a +3 = 0 *имеет ровно четыре различных действительных корня .*

Решение: Введем обозначение *х2 = у* и запишем данное уравнение в виде

у2 + (3а + 1)у + а +3 = 0.

Из условия х2 = у следует, что у $\geq 0$ $\left\{\begin{array}{c}(3а+1)^{2}-4\left(а+3\right)>0\\y\_{1 }∙y\_{2}>0\\y\_{1 }+y\_{2}>0\end{array}\right.⟺$ $\left\{\begin{array}{c}9a^{2}+2a-11>0\\a+3>0\\3a+1>0\end{array}\right.⟺$ -3 < a < - $\frac{11}{9}$.

Ответ: a $ϵ$ (- 3; - 1$\frac{2}{9}$).

**Задача 4**. *Найти все значения параметра* ***а*** *, при которых уравнение*

$\sqrt{x^{4}-7x^{2}-2\left(a-5\right)x+2a+6}$ = x2 – 4 *имеет хотя бы один корень . Решение:*

данное уравнение равносильно системе :

$$\left\{\begin{array}{c}|x|\geq 2\\x^{2}-2\left(a-5\right)x+2\left(a-5\right)=0.\end{array}\right.$$

Первое условие не выполняется при х $\notin $ (-2; 2). Условие второе не выполняется в двух случаях. Первый: уравнение не имеет корней, т.е. дискриминант D меньше 0.Тогда $(a-5)^{2}-2\left(a-5\right)<0.$ Отсюда

 a $ϵ (5;7)$. Второй случай: уравнение системы имеет корни, но не те, что требуются, они не удовлетворяют условию $|x|\geq 2$ , т.е. принадлежат интервалу (-2; 2). Этот случай опишем системой неравенств, обозначив через *f(x)* подкоренное выражение в исходном уравнении :

$\left.\begin{array}{c}D\geq 0\\f\left(-2\right)>0\\f\left(2\right)>0\\-2<x<2\end{array}\right\}$ $⟺\left\{\begin{array}{c}(a-5)^{2}-2(a-5)\geq 0\\(-2)^{4}-7∙4+4\left(a-5\right)+2a+6>0\\2^{4}-7∙4+4\left(a-5\right)+2a+6>0\\-2<\left(a-5\right)\pm \sqrt{\left(a-5\right)^{2}-2\left(a-5\right)}<2\end{array}\right.⟹$

$\left\{\begin{array}{c} a\in \left(-\infty ;5\right]∪[7;+\infty )\\a>\frac{13}{3}\\ a<7\\\frac{13}{3} <a<7\end{array}\right.⟹$ $\frac{13}{3}$ < *a* $\leq 5.$

Поскольку a$ ϵ$ ($\frac{13}{3}$ ; $5]$ $⊂$ ($\frac{13}{3}$ ; $7]$, утверждаем, что при a$ ϵ$ ($\frac{13}{3}$ ; $7)$ решений нет. Значит, при всех других значениях а решение есть.

Ответ: a$ ϵ$ (- $\infty ;\frac{13}{3}]$ $∪$ [$7;+\infty )$.

**Задача 5**. *Найти все значения параметра а, при которых уравнение*

 (a - 3) $∙ 4^{x}-8∙6^{x}+\left(a+3\right)∙9^{x}$= 0 *не имеет корней.*

 *Решение:*

Путем замены *y* = ( $\frac{2}{3})^{x}$ *(где у >0)* приведем данное уравнение к виду

(a - 3) $∙ у^{2}-8∙у+\left(a+3\right)=0.$

Если в последнем уравнении а =3, то у = $\frac{ 3}{4}$ > 0, $\frac{3}{4}$ = ( $\frac{2}{3})^{x}$ – это уравнение имеет корень.

Если в последнем уравнении, а $\ne $3, то исходное уравнение не имеет корней в двух случаях:

а) когда дискриминант D уравнения отрицателен;

б) когда у1$ \leq $у2 $\leq $ 0. Рассмотрим каждый случай.

а) D < 0, 25 – a2 < 0, a > 5, либо a < - 5;

б)$\left\{\begin{array}{c}D\geq 0\\y\_{1 }∙y\_{2}\geq 0\\y\_{1 }+y\_{2}\leq 0\end{array}\right.⟺\left\{\begin{array}{c}|a|\leq 5\\\frac{4+\sqrt{25-a^{2}}}{a-3}∙\frac{4-\sqrt{25-a^{2}}}{a-3}\geq 0\\\frac{4+\sqrt{25-a^{2}}}{a-3}+\frac{4-\sqrt{25-a^{2}}}{a-3}\leq 0\end{array}\right.⟺$

$\left\{\begin{array}{c}\left|a\right|\leq 5\\\frac{a+3}{a-3}\geq 0\\\frac{8}{a-3}\leq 0\end{array}\right.⟺a \in [-5 $; - 3].

Объединяя случаи а) и б), получим : а $\leq -3$ или а > 5.

Ответ: $a \in (-\infty ;$ - 3]$∪$[5; + $\infty )$.

Список использованной литературы:

Алгебра и начала анализа 10: учебник для общеобразоват. учреждений Колягин Ю. М., Сидоров Ю.В., Ткачева М.В, Федорова Н. Е.: –М.: Мнемозина, 2011

Журнал «Математика в школе» 1998 №3, стр.9

Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач: ФИПИ.-М. Интеллект- Центр, 2012.