Применение скалярного произведения векторов

 на уроках алгебры.

 Учитель математики лицея №344

 г. Санкт-Петербург, Воробей И.М.

Основная цель : ознакомить с данным методом и показать его эффективность при решении уравнений , систем уравнений и некоторых других алгебраических задач.

 Векторный метод может быть успешно применен не только в геометрии , но и в алгебре.

 Сначала напомним определение и свойства скалярного произведения векторов.

 Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними :

 $\vec{a}$ $∙\vec{b}$=|$\vec{a}$|$∙$|$\vec{b}$|$∙\cos(α)$ , где α – угол между векторами $\vec{a}$и$\vec{b}$

 Так как |$\cos(α|\leq 1)$, то |$\vec{a}$|$∙$|$\vec{b}$|$∙\cos(α\leq |)\vec{a}$|$∙$|$\vec{b}$| , следовательно ,

 $\vec{a}\vec{b}$≤|$\vec{a}$|$∙$|$\vec{b}$| .

 Если векторы $\vec{a}$ и$\vec{b}$ коллинеарные , то $|\vec{a}∙\vec{b}$|= |$\vec{a}$|$∙|\vec{b}$|. В случаи , когда

 $\vec{a}\uparrow \uparrow \vec{b}$ , $\vec{a}∙\vec{b}$ = |$\vec{a}$|$∙|\vec{b}$|.

 Если векторы имеют известные в прямоугольной системе координат координаты , т.е. $\vec{a}${$x\_{1};y\_{1}\} $и $\vec{b}${$x\_{2};y\_{2}\}$ , то их скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат :

 $\vec{a}∙\vec{b}$ = $x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}$ , |$\vec{a}$|=$\sqrt{x\_{1}^{2}+y\_{1}^{2}}$ ; |$\vec{b}$|=$\sqrt{x\_{2}^{2}+y\_{2}^{2}}$ .

 Значит, $x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}\leq \sqrt{x\_{1}^{2}+y\_{1}^{2}}∙\sqrt{x\_{2}^{2}+y\_{2}^{2}}$ .

 В пространстве справедливы аналогичные формулы

 $x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}+z\_{1}z\_{2}\leq \sqrt{x\_{1}^{2}+y\_{1}^{2}+z\_{1}^{2}}∙\sqrt{x\_{2}^{2}+y\_{2}^{2}+z\_{2}^{2}}$ .

 Наличие радикалов позволяет предположить , что некоторые математические задачи , например , иррациональные уравнения можно решать с помощью скалярного произведения векторов.

 Рассмотрим несколько примеров. Покажем эффективность векторного метода при решении уравнений , систем уравнений и при нахождении наименьшего ( наибольшего ) значения функции.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{5-x}$ +$\sqrt{x+3}$ = 4.

 Решение . ОДЗ: $-3\leq x\leq 5$ . Далее , обычно , возводят обе части уравнения в квадрат. В этом уравнении эту операцию пришлось бы произвести два раза. Можно решить это уравнение методом оценок. Покажем еще один способ , с помощью скалярного произведения векторов.

 Рассмотрим вектор $\vec{a}$ { $\sqrt{5-x}$;$\sqrt{x+3}$ } и вектор$\vec{b}$ { 1 ; 1 } .

 $\vec{a}$ $∙\vec{b}$ = $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+3}$ ; |$\vec{a}$ |=$\sqrt{5-x+x+3}$ = $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ; |$\vec{b}$ |= $\sqrt{2}$ .

 Т.к. $\vec{a}∙\vec{b}\leq |\vec{a}$|$∙|\vec{b}$|,то $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+3}\leq 2\sqrt{2}∙\sqrt{2}$ .

 Итак , $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+3}\leq 4 .$ По условию $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+3}=4 .$

 Но $\vec{a}∙\vec{b}$ = |$\vec{a}|∙$ |$\vec{b}$| , если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} $сонаправленные , т.е.

 $\frac{\sqrt{5-x}}{1}=\frac{\sqrt{x+3}}{1}$ . Откуда $\sqrt{5-x}=\sqrt{x+3} ;$ $2x=2 ;x=1.$

 Ответ : 1.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x+2}+\sqrt{x^{2}-x}=\sqrt{2x^{2}+4}$ .

 Решение. ОДЗ: $-2\leq x\leq 0;x\geq 1 .$ Пусть $\vec{a}${$\sqrt{x+2};\sqrt{x^{2}-x}\}$ и $\vec{b}$ { 1; 1}.

 |$\vec{a}$| = $\sqrt{x^{2}+2}$ ; |$\vec{b}$| = $\sqrt{2}$ ; $\vec{a}∙\vec{b}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x^{2}-x}$ ;

 $\sqrt{x+2}+\sqrt{x^{2}-x}$ $\leq \sqrt{2}∙\sqrt{x^{2}+2}$ ; $\sqrt{x+2}+\sqrt{x^{2}-x}\leq \sqrt{2x^{2}+4}$ .

 Равенство возможно только , если векторы $\vec{a} и \vec{b}$ сонаправленные ,т.е.

 $\frac{\sqrt{x+2}}{1}=\frac{\sqrt{x^{2}-x}}{1}$ ; $x+2=x^{2}-x ; x^{2}-2x-2=0;x\_{1}=1-\sqrt{3};x\_{2}=1+\sqrt{3}$ .

 Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

 Ответ: 1 $-\sqrt{3};1+\sqrt{3}$ .

 Пример 3. Решить систему уравнений $\left\{\begin{array}{c}x-y=6,\\x^{2}+y^{2}=18\end{array}\right.$ .

 Решение . Пусть $\vec{a}${ $x;y\}$ , а $\vec{b}\{1;-1\}$ ;|$\vec{a}|=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ ; $|\vec{a|}^{2}=x^{2}+y^{2}$.

 По условию $x^{2}+y^{2}=18, $следовательно , |$\vec{a}|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ ; |$\vec{b}|=\sqrt{2}$ .

 $\vec{a}∙\vec{b}=x-y .$ Т.к $\vec{a}∙\vec{b}\leq \left|\vec{a}\right|∙\left|\vec{b}\right|$ , то $x-y\leq 6 ,$ а по условию $x-y=6.$

 Значит, векторы $\vec{a} и \vec{b} $ сонаправленные . Имеем $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}$ ; $y=-x$. Из 1-ого уравнения получаем $x-\left(-x\right)=6;x=3;y=-3.$

 Ответ: $(3;-3)$

 Пример 4. Решить систему уравнений $\left\{\begin{array}{c}x^{4}+y^{4}+z^{4}=1,\\x^{2}+2y^{2}+2z^{2}=3\end{array}\right.$ .

 Решение . Рассмотрим вектор $\vec{a}\{x^{2};y^{2};z^{2}\}$ и вектор $\vec{b}\{1;2;2\}$ ;

 |$\vec{a}|=\sqrt{x^{4}+y^{4}+z^{4}} ;$ из условия имеем |$\vec{a}|=1 ;$ |$\vec{b}|=3.$

 $\vec{a}∙\vec{b}=x^{2}+2y^{2}+2z^{2}$ ; |$\vec{a}|∙\left|\vec{b}\right|=3.$ Следовательно, исходя из условия, имеем $\vec{a}∙\vec{b}=\left|\vec{a}\right|∙\left|\vec{b}\right|$ . Это равенство возможно , если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные ,т.е. $\frac{x^{2}}{1}=\frac{y^{2}}{2}=\frac{z^{2}}{2}$ ; $\left\{\begin{array}{c}y^{2}=2x^{2}\\z^{2}=2x^{2}\end{array}\right.$ . Подставляя во 2-ое уравнение системы получим $x^{2}=\frac{1}{3}$ . Тогда $y^{2}=z^{2}=\frac{2}{3}$ . Исходная система имеет восемь решений.

 Ответ : ($\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}} ) ;\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$ ; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}} \right);\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right);$

 $(-\frac{1}{\sqrt{3}}$;$\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}) ;\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$

 Пример 5. Доказать , что система уравнений$\left\{\begin{array}{c}3x+4y=8,\\9x^{2}+y^{2}=3\end{array}\right.$ не имеет решений.

 Доказательство. Пусть $\vec{a}\left\{3x;y\right\},а \vec{b}\left\{1;4\right\} ;\left|\vec{a}\right|=\sqrt{9x^{2}+y^{2}}$ , |$\vec{b}|=\sqrt{17}$ . По условию $9x^{2}+y^{2}=3 ,$ значит , |$\vec{a}|=\sqrt{3}$ . Т.к. $\vec{a}∙\vec{b}\leq |\vec{a}|∙|\vec{b}|$ , то $\vec{a}∙\vec{b}\leq \sqrt{51}$ Из условия $\vec{a}∙\vec{b}=3x+4y=8 ; 8>\sqrt{51}$ . Значит , система не имеет решений , что и требовалось доказать.

 Пример 6 . При каком значении $x$ функция $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}$ принимает наибольшее значение ?

 Решение . D(y) = [ - 2 ; 6 ] . Рассмотрим векторы $\vec{a}${$\sqrt{x+2};\sqrt{6-x} \}$ и $\vec{b}\left\{1;1\right\}.$

 $\vec{a}∙\vec{b}=\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}$ ; |$\vec{a}|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ; |$\vec{b}|=\sqrt{2}$ ; |$\vec{a}|∙\left|\vec{b}\right|=4$ .

 Т.к. $\vec{a}∙\vec{b}\leq |\vec{a}|∙|\vec{b}|$ , то $\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\leq 4.$ Итак , наибольшее возможное значение функции равно 4. Равенство достигается , если $\vec{a}\uparrow \uparrow \vec{b}$ .

 Т.е. $\frac{\sqrt{x+2}}{1}=\frac{\sqrt{6-x}}{1}$ . Решив это уравнение , получим , что $x=2$ - корень уравнения.

 Ответ : при $x=2$ функция принимает наибольшее значение.

 Пример 7 . Найти наибольшее значение выражения $8\sin(α)-15\cos(α)$ .

 Решение . Рассмотрим векторы $\vec{a}${$8;-15\} $и $\vec{b}\{\sin(α;\cos(α\}))$ .

 $\vec{a}∙\vec{b}=8\sin(α-15\cos(α))$ ; $\left|\vec{a}\right|=17 ;\left|\vec{b}\right|=1.$ Т.к. $\vec{a}∙\vec{b}\leq |\vec{a}|∙|\vec{b}|$ , то получаем $8\sin(α-15\cos(α\leq 17.))$ Итак , наибольшее значение выражения $8\sin(α--17\cos(α))$ равно 17 .

 Ответ : 17 .

 Пример 8 . При всех значениях параметра $a$ решить уравнение

 $\sqrt{a+1}∙\sqrt{x-a}+\sqrt{2a-x}=\sqrt{a(a+2)}$ .

 Решение . ОДЗ ( для параметра $a)$ : $a\geq 0$ .

 Рассмотрим векторы $\vec{m}\{ \sqrt{a+1};1 \}$ и $\vec{n}\left\{\sqrt{x-a};\sqrt{2a-x}\right\}.$

 $\vec{m}∙\vec{n}=\sqrt{a+1}∙\sqrt{x-a}+\sqrt{2a-x}$ ; |$\vec{m}|=\sqrt{a+2} ;\left|\vec{n}\right|=\sqrt{a}$ .

 Т.к. $\vec{m}∙\vec{n}\leq |\vec{m}|∙|\vec{n}|$ , то $\sqrt{a+1}∙\sqrt{x-a}+\sqrt{2a-x}\leq \sqrt{a(a+2)}$ .

 Равенство возможно , если $\vec{m}\uparrow \uparrow \vec{n}$ ,т.е. $\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{x-a}}=\frac{1}{\sqrt{2a-x}}$ (\*) . При $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень $x=0.$

 Решая уравнение (\*) , получим $x\left(a+2\right)=a^{2}+3a , откуда x=\frac{a^{2}+3a}{a+2}$ .

 Ответ: при $a\geq 0 уравнение имеет один корень x=\frac{a^{2}+3a}{a+2}$ ;

 при $a<0$ уравнение решений не имеет.

 Пример 9 . При каких значениях параметра$ a$ уравнение $ $

 $\cos(x+\sqrt{1-a})∙\sin(x=\sqrt{2-a})$ имеет решение. Найти его .

 Решение . ОДЗ ( для параметра ) : $a\leq 1.$

 Рассмотрим $\vec{m}\{\cos(x;\sin(x\};|\vec{m}))|=1 ; \vec{n}\left\{1;\sqrt{1-a}\right\};\left|\vec{n}\right|=\sqrt{2-a} ;$

 $\vec{m}∙\vec{n}=\cos(x+\sqrt{1-a})∙\sin(x) ;\left|\vec{m}\right|∙\left|\vec{n}\right|=\sqrt{2-a}$ ;

 Т.к. $\vec{m}∙\vec{n}\leq |\vec{m}|∙|\vec{n}|$ , то $\cos(x+\sqrt{1-a})∙\sin(x\leq \sqrt{2-a})$ . Равенство возможно , если векторы сонаправлены , т.е. $\frac{\cos(x)}{1}=\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-a}}$ .

 Если $a=1$ , то уравнение примет вид $\cos(x=1)$ , откуда $x=2πn, nϵZ .$

 Если $a<1 $, то из пропорции получим $\sqrt{1-a}∙\cos(x=\sin(x))$ ; $tgx=\sqrt{1-a}$ ,

 откуда $x=arctg \sqrt{1-a}+πn , nϵZ .$

 Ответ: $x=2πn , nϵZ , если a=1 ;$

 $x=arctg\sqrt{1-a}+πn , nϵZ , если a<1 ;$

 уравнение не имеет решений , если $a>1 .$

 Пример 10 . Доказать неравенство $x^{2}+\frac{1}{x^{2}}\geq 2 для x=0 .$

 Доказательство . Докажем это неравенство с помощью скалярного произведения векторов. Рассмотрим два вектора $\vec{a}\left\{x;\frac{1}{x}\right\}$ и $\vec{b}\left\{\frac{1}{x};x\right\} ;$

 $\vec{a}∙\vec{b}=x∙\frac{1}{x}+\frac{1}{x}∙x=2 ; \left|\vec{a}\right|∙\left|\vec{b}\right|=\sqrt{x^{2}+\frac{1}{x^{2}}}∙\sqrt{\frac{1}{x^{2}}+x^{2}}=x^{2}+\frac{1}{x^{2}}$ .

 Т.к. $\vec{a}∙\vec{b}\leq |\vec{a}|∙|\vec{b}|$ , то $x^{2}+\frac{1}{x^{2}}\geq 2 $, что и требовалось доказать .

 Пример 11 . Доказать , что если $x^{2}+y^{2}=18 , то x+y\leq 6 .$

 Доказательство . Рассмотрим векторы $\vec{a}\left\{ 1;1 \right\}$ и $\vec{b}\{ x ;y \}$ ; $\vec{a}∙\vec{b}=x+y ;$ $\left|\vec{a}\right|∙\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}∙\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ . Т.к $\vec{a}∙\vec{b}\leq |\vec{a}|∙|\vec{b}|$ и по условию $x^{2}+y^{2}=18$ , то получим $x+y\leq \sqrt{2}∙\sqrt{18 } ; x+y\leq 6$ . Что и требовалось доказать .

Было рассмотрено несколько математических задач , которые решены «векторным» методом , точнее с помощью скалярного произведения векторов. Главная трудность в использовании этого метода в решении задач заключается в выборе векторов. Нужно выбрать координаты векторов $\vec{a}\{x\_{1};y\_{1}\}$ и $\vec{b}\{x\_{2};y\_{2}\}$ так , чтобы уравнение приняло вид $x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}=\sqrt{x\_{1}^{2}+y\_{1}^{2}}\sqrt{x\_{2}^{2}+y\_{2}^{2}}$ .