Применение скалярного произведения векторов

на уроках алгебры.

Учитель математики лицея №344

г. Санкт-Петербург, Воробей И.М.

Основная цель : ознакомить с данным методом и показать его эффективность при решении уравнений , систем уравнений и некоторых других алгебраических задач.

Векторный метод может быть успешно применен не только в геометрии , но и в алгебре.

Сначала напомним определение и свойства скалярного произведения векторов.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними :

=|||| , где α – угол между векторами и

Так как |, то ||||||| , следовательно ,

≤|||| .

Если векторы и коллинеарные , то |= |||. В случаи , когда

, = |||.

Если векторы имеют известные в прямоугольной системе координат координаты , т.е. {и { , то их скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат :

= , ||= ; ||= .

Значит, .

В пространстве справедливы аналогичные формулы

.

Наличие радикалов позволяет предположить , что некоторые математические задачи , например , иррациональные уравнения можно решать с помощью скалярного произведения векторов.

Рассмотрим несколько примеров. Покажем эффективность векторного метода при решении уравнений , систем уравнений и при нахождении наименьшего ( наибольшего ) значения функции.

Пример 1. Решить уравнение + = 4.

Решение . ОДЗ: . Далее , обычно , возводят обе части уравнения в квадрат. В этом уравнении эту операцию пришлось бы произвести два раза. Можно решить это уравнение методом оценок. Покажем еще один способ , с помощью скалярного произведения векторов.

Рассмотрим вектор { ; } и вектор { 1 ; 1 } .

= ; | |= = ; | |= .

Т.к. ||,то .

Итак , По условию

Но = | || , если векторы и сонаправленные , т.е.

. Откуда

Ответ : 1.

Пример 2. Решить уравнение .

Решение. ОДЗ: Пусть { и { 1; 1}.

|| = ; || = ; ;

; .

Равенство возможно только , если векторы сонаправленные ,т.е.

; .

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 1 .

Пример 3. Решить систему уравнений .

Решение . Пусть { , а ;| ; .

По условию следовательно , | ; | .

Т.к , то а по условию

Значит, векторы сонаправленные . Имеем ; . Из 1-ого уравнения получаем

Ответ:

Пример 4. Решить систему уравнений .

Решение . Рассмотрим вектор и вектор ;

| из условия имеем | |

; | Следовательно, исходя из условия, имеем . Это равенство возможно , если векторы и сонаправленные ,т.е. ; . Подставляя во 2-ое уравнение системы получим . Тогда . Исходная система имеет восемь решений.

Ответ : ( ;

;

Пример 5. Доказать , что система уравнений не имеет решений.

Доказательство. Пусть , | . По условию значит , | . Т.к. , то Из условия . Значит , система не имеет решений , что и требовалось доказать.

Пример 6 . При каком значении функция принимает наибольшее значение ?

Решение . D(y) = [ - 2 ; 6 ] . Рассмотрим векторы { и

; | ; | ; | .

Т.к. , то Итак , наибольшее возможное значение функции равно 4. Равенство достигается , если .

Т.е. . Решив это уравнение , получим , что - корень уравнения.

Ответ : при функция принимает наибольшее значение.

Пример 7 . Найти наибольшее значение выражения .

Решение . Рассмотрим векторы {и .

; Т.к. , то получаем Итак , наибольшее значение выражения равно 17 .

Ответ : 17 .

Пример 8 . При всех значениях параметра решить уравнение

.

Решение . ОДЗ ( для параметра : .

Рассмотрим векторы и

; | .

Т.к. , то .

Равенство возможно , если ,т.е. (\*) . При исходное уравнение имеет единственный корень

Решая уравнение (\*) , получим .

Ответ: при ;

при уравнение решений не имеет.

Пример 9 . При каких значениях параметра уравнение

имеет решение. Найти его .

Решение . ОДЗ ( для параметра ) :

Рассмотрим

;

Т.к. , то . Равенство возможно , если векторы сонаправлены , т.е. .

Если , то уравнение примет вид , откуда

Если , то из пропорции получим ; ,

откуда

Ответ:

уравнение не имеет решений , если

Пример 10 . Доказать неравенство

Доказательство . Докажем это неравенство с помощью скалярного произведения векторов. Рассмотрим два вектора и

.

Т.к. , то , что и требовалось доказать .

Пример 11 . Доказать , что если

Доказательство . Рассмотрим векторы и ; . Т.к и по условию , то получим . Что и требовалось доказать .

Было рассмотрено несколько математических задач , которые решены «векторным» методом , точнее с помощью скалярного произведения векторов. Главная трудность в использовании этого метода в решении задач заключается в выборе векторов. Нужно выбрать координаты векторов и так , чтобы уравнение приняло вид .