**Балагурова-Шемота Наталья Юрьевна**

**Учитель математики МБОУ лицей №90 г. Краснодар**

**Учебник А.Г. Мордкович (углубленное изучение).**

**Класс -8**

**Тема: *«Способы решения иррациональных уравнений»***

**Учебник**: автор А.Г. Мордкович «Алгебра,8» углубленное изучение.

**Учитель**: Наталья Юрьевна Балагурова-Шемота.

**Оборудование:**  мультимедиа, доска на три человека, карточки, раздаточный материал.

**Цели урока:**

**обучающая** - обобщить и систематизировать знания учащихся по применению различных способов решения иррациональных уравнений с одним корнем или с двумя.

**развивающая** - развить нестандартное мышление через умение находить рациональные пути решения, научить переключаться с одного способа на другой.

**воспитательная** - воспитать культуру соблюдения всех этапов аргументации при решении уравнений, терпение, упорство в достижении цели.

**Ход урока**

**1.** ***Введение в урок, организационный этап*** *(2 минуты)****.***

Здравствуйте ребята, сегодня мы познакомимся с некоторыми способами решения иррациональных уравнений.

Цель урока состоит в том, чтобы обобщить и систематизировать методы решения иррациональных уравнений; познакомить вас с новым типом иррациональных уравнений, состоящих из двух радикалов.

На этом уроке мы попытаемся научиться определять оптимальный способ решения того или иного иррационального уравнения.

Эпиграфом урока станут слова великого ученого: (Слайд 2)

***«Мне приходится делить время между политикой и уравнениями. Однако уравнения, по-моему, гораздо важнее. Политика существует для данного момента, а уравнения будут существовать вечно».***

Чьи это слова, вы узнаете в конце урока.

***2. Устный счет, проверка домашнего задания (****8 минут****).***

Начнем с обзора домашнего задания. Откройте тетради с домашней работой. На дом вам было задано решить уравнения различными способами: методом равносильных переходов и методом проверки. Кто покажет свое решение на доске? Пожалуйста. (*Выходят два ученика и приступают к оформлению решений уравнений, решенных различными способами*).

А остальные включаются в устный счет (*работа с классом*) (Слайд 3)

**1)** Имеет ли уравнение корни 

**Ответ:** Нет. Почему?

**2)** Решите уравнение 

**Ответ**: 

**3)** Решите уравнение

**Ответ:** Нет решений. Поясните. (Так как корень квадратный ни при каких значениях *х* не может принимать значение равное – 2.)

**4)** Решите уравнение (Слайд 4)

**Ответ:** Нет решений. Поясните. (Так как сумма двух неотрицательных выражений не может принимать отрицательное значение).

**5)** Решите уравнение

**Ответ**: х=3. Поясните ход решения. (Так как сумма двух неотрицательных выражений равна нулю, если только оба слагаемых одновременно равны нулю).

Итак, как вы уже заметили, уравнение может иметь единственный корень или несколько корней, а может совсем не иметь решений. Вы так же поняли, что, иногда, только по виду уравнения можно сразу определить количество его корней. В большинстве же случаев, которые вы изучали уже ранее, только доведя решение задачи до конца, можно однозначно ответить на этот вопрос.

Напомню, что решениями или корнями уравнения называют те значения переменной, при подстановке которых в него, обе части уравнения одновременно принимают одно и тоже значение. Обратите внимание, что к решениям уравнения используется устоявшийся термин «корень». И сегодня мы будем рассматривать иррациональные уравнения, содержащие только квадратные корни.

Наши отвечающие у доски уже готовы, давайте посмотрим на их решения.

**Уравнение на доске 1-го ученика.** Решить: .

**Решение:**



. **Ответ:** .

**Учитель:** Ответьте,ребята, почему этот пример не был решен способом подстановки?

**Ученик 1:** В таком способе отбора корней необходимо вычислить значения обеих частей уравнения и убедиться, что они принимают равные значения. Очевидно, что достаточно трудно вычислить значение левой части уравнения при .

**Учитель**: Да, но не надо забывать и достоинства способа проверки корней уравнения с помощью их подстановки в него. Ведь этим способом мы заодно проверяем, не допустили ли мы арифметической ошибки? Давайте разберем другое уравнение, приведенное на доске и решенное методом подстановки.

**Уравнение на доске 2-го ученика.** Решить: .

**Решение:** 



.

**Проверка**: 

 равенство неверное.

- не является корнем исходного уравнения.

**Ответ:** корней нет.

**Учитель:** Скажите, обязательно ли было записывать проверку в решении, если вы сделали ее устно?

**Ученик 2:** Здесь очень важно было доказать, что данное уравнение решений не имеет, поэтому проверка является доказательством того, что найденный корень как раз посторонний, поэтому эту часть решений приводят обязательно.

**Учитель:** А если бы этот корень при подстановке подходил и превращал уравнение в верное числовое равенство, надо было бы выписывать в решении проверку и почему? Кто из класса ответит?

**Ученик 3:** Конечно надо, так как при возведении в квадрат мы переходили к уравнению, которое может иметь посторонние для исходного уравнения корни. Надо проверить, какие именно корни являются решениями исходного иррационального уравнения.

**Учитель:** Молодцы все, кто был у доски и активно участвовал в обсуждении и устном счете!

**2.** **Сравнительный анализ аналитических способов решений иррационального уравнения имеющего стандартный вид (***3 минуты***).**

**Учитель:** Давайте теперь перейдем к обзору многочисленных способов решения иррациональных уравнений. Для начала вспомним, какие именно уравнения называются иррациональными?

**Ученик:** Уравнения, содержащие переменную под знаком корня.

**Учитель:** Верно, иногда еще говорят, что это уравнения, содержащие знак радикала, и это тоже будет правильно, так как знак самого корня  произошел от латинской буквы r . Дело в том, что первыми «нерациональными» числами считались числа, содержащие корень, «который не извлекался». Например,  Поэтому и уравнения, содержащие под корнем переменную, стали называть иррациональными. Однако в конце урока я напомню вам еще об одном «важном» для математиков иррациональном числе, которое вы прекрасно знаете. Однако, «иррациональным» оно стало считаться намного позже чисел, указанных выше, то есть содержащих радикал.

Итак, давайте обобщим наблюдения по использованию *различных способов отбора корней при возведении в квадрат* стандартного иррационального уравнения, выделим их достоинства и недостатки.

1) если проверять корни «*подстановкой»* их в исходное уравнение, то в случае равенства левой и правой части мы убеждаемся, что в решении мы не допускали арифметических ошибок. Помните, как именно для этого производилась проверка при решении уравнений в младших классах?

Недостаток способа решения «подстановкой» проявляется в случае, если корни «неудобные» с точки зрения арифметики.

2) если найденные корни дробные, многозначные или иррациональные, то, как вы уже знаете, можно проверить только неотрицательность правой части стандартного иррационального уравнения. В этом и заключается достоинство метода *«равносильного перехода».*

3) напомню теперь третий способ, который мы сегодня не приводили на примерах. Если при возведении в квадрат получаются трудоемкие упрощения и вычисления, тогда обратите внимание на решение системы условий, при которых одновременно и подкоренное выражение и правая часть, которой этот корень равен, являются неотрицательными. Посмотрите, пожалуйста, на следующий слайд:

**Решить уравнение**.



**Ответ:** решений нет.

**Учитель:** Кто прокомментирует решение на слайде?

**Ученик:** Так как корень уравнения при подстановке в уравнение превращает его в верное числовое равенство, то, прежде всего, этот корень должен удовлетворять выписанной системе условий. Достаточно заметить, что эта система решений не имеет, а это значит, что и само уравнение не имеет корней.

**Учитель:** Давайте этот метод назовем «метод пристального взгляда», так как если вовремя обратить на такую систему внимание, это значительно сэкономит время при решении такого уравнения.

**3. Сравнительный анализ различных способов решения уравнений, содержащих один корень (***15 минут***).**

**Учитель:** Ранее мы обсудили различные способы отбора корней стандартного иррационального уравнения, повторив их дома. Давайте теперь решим одно уравнение различными способами в тетрадях и на доске. Открыли тетради, записали число и задание.

Решить уравнение . Каждый ряд решает это уравнение своим способом:

1 ряд – возведением в квадрат,

2 ряд – введением новой переменной,

3 ряд – графическим способом.

По одному ученику из каждого ряда выполнят эту же работу у доски. Кто к доске?

*(Три ученика одновременно вызываются к доске)*

*(После пяти минут работы, происходит анализ решений со всем классом)*

***1-й способ решения, «Возведением в квадрат».***

Решить уравнение.

**Решение**:



 Отсюда,  **Ответ:** 4.

**Учитель:** Вопрос ряду 2 и 3. Скажите, а почему важно было сначала уединить корень перед возведением в квадрат?

**Ученик:** Если уединить кореньмы сразу от него избавляемся, для чего и возводим его в квадрат.

**Учитель:** Правильно. Давайте теперь посмотрим, как можно свести уравнение с корнем к квадратному методом «подстановки».

***2-й способ решения. «Введения новой переменной».***

Решить уравнение .

**Решение:** Пусть , где , тогда .

Решим систему:





. Отсюда, ; . **Ответ:** 4.

**Учитель:** Вопрос ряду 1 и 3. А если не выписывали бы условие на новую переменную, как тогда нужно оформлять решение?

**Ученик:** Тогда бы при возвращении к *х* нужно было бы записать, что уравнение  не имеет решений.

**Учитель:** Правильно. Посмотрим теперь другое решение этого же уравнения.

***3-й способ решения. «Графический».***

Решить уравнение.

**Решение:** 





Рис.1.

**Проверка**: подставим  в систему - система верна.

Из рисунка 1 видно, что найденная точка их пересечения  единственная, то есть  единственный корень исходного уравнения.

**Учитель**: Вопрос 1 и 2 ряду. Скажите, а почему «из чертежа очевидно», что будет только одна точка пересечения?

**Ученик:** Обе эти функции монотонно возрастают, причем прямая быстрее увеличивает свои значения, чем функция . Это значит, что график последней функции никогда не догонит прямую  после того, как они пересеклись при .

**Учитель:** Тем более, что при  прямая лежала ниже графика .

Все молодцы! Мы рассмотрели различные способы решения уравнений с одним корнем. Как видите графический способ нагляднее, но трудный в угадывании корней, а так же, в обосновании их количества. В этом он и проигрывает любому аналитическому способу.

Давайте теперь проанализируем приведенные на слайде три решения одного иррационального уравнения и выберем самое красивое из них. (Слайд 5)

**Слайд 1.** Решить уравнение

**Решение.** ***«Возведение в квадрат***» перейдем к системе:





Так как первое уравнение имеет D= - 3<0, то система не имеет решений.

**Ответ:** нет решений.

**Слайд 2**. Решить уравнение

**Решение:** ***«Пристальным взглядом»*** можно заметить, что корень уравнения должен удовлетворять системе условий:





Так как система не имеет решений ни при одном значении *x*, то корней нет.

**Ответ:** нет решений.

**Слайд 3**.Решить уравнение

**Решение:** ***«Графический способ»*** применим к системе: (Слайд 6)





Так как при  функция  монотонно возрастает, а  монотонно убывает. С учетом, что при  прямая лежит ниже нуля, то графики рассматриваемых функций не пересекутся.

**Ответ:** нет решений.

**Учитель:** Каким же способом рациональнее было решать данное уравнение?

**Класс:** Вторым способом.

**4. Индивидуальная работа (***5 минут***).**

Любопытная пауза. Гениальный математик

Эварист Галуа (1811- 1832) был убит на дуэли. Ребята, как вы думаете, почему это произошло? Причина? Почему он известен в мире математики?

А теперь попробуйте решить уравнения методом введения новой переменной. Решаем уравнение, поднимаем руки и сверяем свои решения с приведенным на слайде. (Слайд 9)



**5. Применение изученных способов к решению уравнений с двумя радикалами (***7 минут***) .**

**Учитель:** Давайте теперь попробуем решить уравнение с двумя квадратными корнями различными способами. Все пишут в тетрадях, я у доски. (Слайд 10)

Решить уравнение.

**Решение 1:** Перед тем, как возвести обе части уравнения в квадрат часто целесообразно сначала уединить корень, как это уже мы делали ранее.



Методом равносильных переходов решить полученное уравнение достаточно тяжело, а значит не рационально. Возведем в квадрат левую и правую часть уравнения и затем проверим корень подстановкой.











**Проверка.** Подставим в уравнение; - верное равенство, то есть 2 является решением исходного уравнения.

**Ответ**: 2

Графически представить части уравнения, даже переносом радикалов в разные стороны достаточно сложно, хотя и можно построить с помощью переносов осей графики частей уравнения  Но из этого все равно следует, что корень придется угадывать и проверять, а его единственность обосновывать монотонностью функций. В этом случае есть способ попроще, но, по сути, он аналогичен графическому.

**Решение 2:** Так как каждое из слагаемых левой части уравнения  монотонно возрастает при увеличении переменной, то и их сумма монотонно возрастает, а, значит, любое свое значение правая часть уравнения принимает только при одном значении . Подбором можно проверить, что при  левая часть равна пяти, следовательно, других таких значений *х* не существует. **Ответ:** 2.

**Учитель:** Какой из способов решения наиболее оптимален?

**Класс:** Второй способ.

**Учитель:** Еще раз отметим, что метод возведения в квадрат значительно упрощается во многих случаях, если уединить корень. Но этот аналитический способ универсальный, так как графический способ «монотонности левой части»» не всегда применим. Тем более если корень попросту не угадывается. А доказать, что его не существует вообще не возможно. Например, кто может сказать почему последний способ не применим к уравнению , в котором надо найти все целые решения?

**Ученик:** Так как один корень левой части является монотонно возрастающей функцией, а второй - убывающей, то их сумма может не быть монотонной при любых *х*. А значит и значение равное 1 может принимать два раза.

**Учитель:** Остается только уединять один из корней, возводить в квадрат и выполнить проверку. Но это я предлагаю вам сделать дома. Скажите лучше, а нельзя ли здесь «пристально посмотреть» на данное уравнение. Ведь если вернуться к предыдущему «графическому» способу, в случае, если бы мы не заметили, что правая часть не монотонная, то подбор корня мы бы осуществляли, ориентируясь на область определения функции, то есть левой части уравнения. Кто теперь решит эту задачу?

**Ученик:** Найдем область определения левой части, решив систему . Так как по условию задачи надо найти только целые корни уравнения, то остается проверить все три целых числа, найденной области определения, числа: 2, 3, 4. Подстановкой не трудно проверить, что только  является корнем исходного уравнения.

**Учитель:** Молодец! Думаю, что, решив это задание дома возведением в квадрат, вы еще больше убедитесь в красоте только что разобранного решения.

**6.** **Самостоятельная работа (***3 минуты***).** Давайте посмотрим, как быстро вы теперь решите уравнения, не возводя их в квадрат.

Выписывайте ответы себе в тетрадку, а листочки с работой сдаете мне.(Слайд 11)



**Учитель:** Проверяем. (Слайд 12)



У кого 3 правильных ответа? Это 5. Вы получаете право сегодня называться УМНИКОМ!

2 ответа? – 4.

1 ответ? Хоть и тройка, но тоже не плохо.

**7.** **Задание на дом. Итог урока. (***2 минуты***)**

- Дома вы решите выданные вам уравнения различными способами решения. На следующий урок ответите, каким именно способом рациональнее всего было решать их. (Слайд 13)



Много можно говорить об уравнениях. В этой области математики существуют вопросы, на которые ученые еще не дали ответа. Возможно, вам предстоит найти ответы на эти вопросы.

Вернемся к словам нашего неизвестного автора: (Слайд 14)



14 марта у этого ученого день рождения. И именно он говорил, что если бы на решение задачи ему осталась один час, то 59 минут он потратил бы на постановку задачи, так как при правильном подходе к ее решению, ответ можно найти и за одну оставшуюся минуту. Автор этих строк - знаменитый физик Альберт Эйнштейн.

А еще 14 марта - Всемирный день числа . Именно это число, равное отношению длины окружности к ее диаметру вы прекрасно знаете из геометрии. Как раз оно так же является иррациональным, хотя и не содержит в своей записи корень.

Источники

1. А.Г. Мордкович. Алгебра,8 класс (для углубленного изучения), М.:Мнемозина, 2007.
2. Ю.Н. Макарычев, Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса. Под редакцией Г.В.Дорофеева. М.: Просвещение, 1997.
3. М.Л. Галицкий, Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8-9 класса с углубленным изучением математики, М.: Просвещение, 2001.